



分析學

✉ Uwni 鶯鴒 ✉ uwni@example.com

夫分析學者、數學之基也。然則其理實纏綿、非一言所能盡也。

Uwni 鶯鴒 纂於 2026/01/13 12:17:12 時。本文 ↗ 網菜。

1 論數列

1.1 數列

命題 1 有序列 $\{a_n\}$ 單調遞減而 $\{b_n\}$ 單調遞增者、且 $a_n \geq b_n$. $\forall i, j \in \mathbf{N}$, $a_i \geq b_j$ 意即、 a_n 皆 b_n 之上界、 b_n 皆 a_n 之下界也。

證 . 設 $i, j \in \mathbf{N}$ 、不失泛性、分三種情況討論：

- (1) $i = j$: 由題設知 $a_i \geq b_i$ 、故 $a_i \geq b_j$.
- (2) $i < j$: 因 $\{a_n\}$ 單調遞減、故 $a_i \geq a_j$. 因 $\{b_n\}$ 單調遞增、故 $b_j \geq b_i$. 由題設 $a_j \geq b_j$ 、結合上述不等式: $a_i \geq a_j \geq b_j$
- (3) $i > j$: 因 $\{a_n\}$ 單調遞減、故 $a_j \geq a_i$. 因 $\{b_n\}$ 單調遞增、故 $b_i \geq b_j$. 由題設 $a_i \geq b_i$ 、結合上述不等式: $a_i \geq b_i \geq b_j$

綜上所述、 $\forall i, j \in \mathbf{N}$ 、恆有 $a_i \geq b_j$.

因此、任意 a_i 皆為序列 $\{b_n\}$ 之上界、任意 b_j 皆為序列 $\{a_n\}$ 之下界. ■

1.2 數列單調收斂之定理

凡單調遞增數列之有上界者與單調遞減數列之有下界者、皆收斂。請證明之。

1.3 極限

若夫極限者、古希臘之先賢始用之。自古及 Weierstrass



圖 1 Karl Weierstrass, 1815-1897

之議、歷久而鮮能盡其理實也。微分與無窮小之辯、相爭其存廢逾千載猶未能決。其或為 0、或幾及 0 而非 0。時 0 而時亦非 0、George Berkeley 之屬者甚異之。物理學家屢以無窮小正定所求不爽、故不以為謬也。數學之理也、必明必晰。然則應先辯明所謂極限者、後可以確然治分析無慮也。

定義 1 (極限) 稱數列 $\{a_n\}$ 之極限曰

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N}^*)(\forall n > N)|a_n - L| < \varepsilon$$

極限者近而不逮、傍而未屆也。 a_n 之值將屆於 L 、抑不之至。不得知也。若以 $\varepsilon - N$ 定義議之。恣取正數 ε 、不論大小、必存一處 N 、凡 n 之後於 N 者、 a_n 與 L 相距幾微。何以知其然也？蓋其相距小於 ε 者也。凡正數者、皆見小於 a_n 與 L 之相距、此所以度量其近也。豈非因 n 之漸長而 a_n 幾及於 L 耶？！此所謂也、初立論時、不納者眾、至于今世、莫不是之！

1.3.1 單調有界性之定理

數列之收斂者、其極限必存焉。以單調有界性之定理得知其收斂而不得知其極限也。欲察極限幾何、猶須探其值而後驗以定義也。幸有各術如下以索數列之極限、一曰夾逼定理、二曰四則運算、三曰 Stolz-Cesàro 定理也。

1.3.2 夾逼定理

夾逼定理者、求極限之要術也。設有數列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$ 、自某項起恆有 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 、且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ 、則必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ 也。

命題 2 (夾逼定理) 設數列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$ 滿足

$$(\exists N \in \mathbf{N}^*)(\forall n > N) a_n \leq b_n \leq c_n$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ 、則 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ 。

證。以極限定義證之。設 $\forall \varepsilon > 0$ 、因 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ 、故

$$(\exists N_1 \in \mathbf{N}^*)(\forall n > N_1) |a_n - L| < \varepsilon$$

即 $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ 。同理、因 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ 、故

$$(\exists N_2 \in \mathbf{N}^*)(\forall n > N_2) |c_n - L| < \varepsilon$$

即 $L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$ 。

取 $N_0 = \max\{N, N_1, N_2\}$ 、則當 $n > N_0$ 時有

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$$

故 $|b_n - L| < \varepsilon$ 、即 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ 。 ■

若數列 $\{b_n\}$ 之極限難可詳悉、但得覓取上下夾逼之數列 $\{a_n\}$ 與 $\{c_n\}$ 、則可藉求 $\{a_n\}$ 與 $\{c_n\}$ 之極限而得 $\{b_n\}$ 之極限也。

例以議之。

例 1

請證

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

蓋 $|\sin n| \leq 1$ 、故

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1/n) = 0$ 、由夾逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n)/n = 0$ 也。

夾逼定理不獨用於數列、亦可推廣於函數極限。設函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 於點 x_0 之某鄰域內 (或去心鄰域內) 滿足 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 、且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ 、則 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ 也。

1.3.3 極限之代數運算

極限之加減乘除是也。設以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$ 、由定義知 $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
& (\exists N_a \in \mathbf{N}^*)(\forall n > N_a)|a_n - L| < \varepsilon \\
& \wedge (\exists N_b \in \mathbf{N}^*)(\forall n > N_b)|b_n - M| < \varepsilon
\end{aligned}$$

故而 $|-a_n - (-L)| = |a_n - L| < \varepsilon$ 、是以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -L$$

也。設 $N := \max\{N_a, N_b\}$ 、以三角不等式

$$|a_n + b_n - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon$$

故而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L + M$$

並由式 1 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = L - M$ 也。

此所以極限之代數運算效也。

$$|a_n b_n - LM|$$

2 論級數

2.1 級數論

級數者、數列之累和也。累數列 $\{a_n\}$ 前 n 項之和、名曰 $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ 。則記

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

爲無窮級數、畧作級數。其中凡 $a_n > 0$ 者、謂之正項級數。若 s_n 收斂即曰級數收斂。 s_n 發散即謂之級數發散。

命題 3 凡級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 之收斂者

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

證。不妨設 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$ 、 $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ 收斂於 L 。然則由極限定義知、於凡正數 $\varepsilon > 0$ 之中、必存有一自然數 N 、而凡自然數 n 之 $n > N + 1$ 者

$$|s_{n-1} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

然則

$$|s_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

又因 $s_n = s_{n-1} + a_n$ 、故 $\forall n > N$

$$|s_n - L - (s_{n-1} - L)| \leq |s_n - L| + |s_{n-1} - L| < \varepsilon$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。 ■

欲料反之然否、請道以下例。

例 2 (調和級數)

調和級數者、形如 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ 之級數也。雖 $1/n \rightarrow 0$ 於 $n \rightarrow \infty$ 、然其級數發散。請證以比較審斂法：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

分組而計：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \end{aligned}$$

無界而知其發散。此為 Nicolaus Oresmius 於十四世紀所證也。

有諸據可以斷級數之斂散。請道其詳。

2.1.1 檢比術

2.1.2 檢根術

2.2 常數 e

常數 e、或曰**自然底數**、初見於複利率之計算。凡 $n > 0$ 有定義曰

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

此處唯需證明 RHS 收斂。請道其證法。

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k! n^k}$$

$n^k/(k!n^k) > 0$ 、則知 a_n 之嚴格遞增矣。考慮

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-\frac{1}{2}} < 1$$

故 b_n 單調遞減且 $b_n = a_n \sqrt{1+1/n} > a_n$ ，故 b_n 皆 a_n 之上界也。故知 a_n 收斂。 $2 = a_1 < e < b_1 = 2\sqrt{2}$ 。¹⁾

例 3 (別證)

茲定義曰 $e_n := \sum_{k=0}^n 1/k!$ 、由 $(\forall k \geq 1) 1/k! \leq 1/2^{k-1}$

1) 實則 $b_n \simeq a_n$ as $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} e_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{2 \times \cdots \times (n-1) \times n} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 3 \end{aligned}$$

抑由 $\forall k \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} &\leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\ e_n &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 3 \end{aligned}$$

得 3 者 e_n 之上界也。同理可證 e_n 之收斂。由定義知 $\sup a_n = e$ 也。以前例亦得證 e_n 之收斂。然 $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n \stackrel{?}{=} e$ 之真偽猶未能辨、不宜臆斷。

再證二者收斂於同處。庶幾以夾逼定理證之、唯需各項 $a_n < e_n < e$ 。以上圖料其然也。然理學也非證不信非驗不服。請證之如下。

證。張 a_n 如下, $\forall k < n$

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-m+1}{n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &> 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 。然則 $k \in \mathbf{N}$

$$e > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = e_k$$

逐項比較式 1 與 e_n 、知 $e_n > a_n$ 。故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$$

■

2.2.1 指數函數

定義 exp 函數曰

定義 2 (exp 函數)

$$\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

審其斂散、法以比值

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \bigg/ \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \rightarrow 0 \quad \text{當 } n \rightarrow \infty$$

故冪級數 $\exp x$ 於 $\mathbf{R}$ 處處絕對收斂。

2.3 差分方程論

請問線性微分方程如 $y'' + y = 0$ 者當作何解？得本征方程 $r^2 + 1 = 0$ 有根 $r = \pm i$ 故知通解為 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ 。代入即明此誠為其解也。此全解耶？請論其理。定義數列 $\{x_n\}$ 之前向差分算子曰

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

而逆向差分算子曰

$$\nabla x_n = x_n - x_{n-1}$$

$n \geq 0$ 階差分遞歸定義曰

$$\Delta^n = \begin{cases} I & \text{if } n = 0 \\ \Delta \circ \Delta^{n-1} & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

因 $\Delta(ax_n + by_n) = a\Delta x_n + b\Delta y_n$ ，可知 Δ 為線性算子。又以 I 之線性、知 Δ^n 亦線性也。稱形如

$$\sum_{k=0}^n a_k \Delta^k x_k = b$$

之方程式曰 n 階常係數差分方程。特稱 $b = 0$ 者為齊次、否則為非齊次。若有一列數 $\hat{x}_n$ 可令 $x_n = \hat{x}_n$ 滿足方程、則稱 $\hat{x}_n$ 為方程之解。請探其性質。凡非齊次方程之解 $\{\hat{x}_n\}$ 、 $\{\hat{y}_n\}$ 、其和 $\{\hat{x}_n + \hat{y}_n\}$ 亦解矣

$$\sum_{k=0}^n a_k \Delta^k (\alpha \hat{x}_k + \beta \hat{y}_k) = \alpha \sum_{k=0}^n a_k \Delta^k \hat{x}_k + \beta \sum_{k=0}^n a_k \Delta^k \hat{y}_k = 0$$