



漸近分析與攝動方法

Uwni ✉ satanyalin@gmail.com

目录

首先看一个例子

□ EXAMPLE 1

考虑 $1/(1+t)$ 的 Laplace 变换

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{1}{1+t} e^{-tx} dt$$

此函数为超越函数，也就是说其没有解析解。我们不妨对 $1/(1+t)$ 进行 Maclaurin 展开。在 $|t| < 1$ 内

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

代入

$$\begin{aligned} F(x) &\stackrel{?}{=} \int_0^\infty (1 - t + t^2 - t^3 + \dots) e^{-tx} dt \\ &= \sum \int_0^\infty (-t)^k e^{-tx} dt \\ &= \sum \int \partial_x^k e^{-tx} dt \\ &= \sum \partial_x^k \int e^{-tx} dt \end{aligned}$$

□

一些定义

DEFINITION 1 · 渐近相等 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为定义在某个区间 (a, b) 上的函数，且 $g(x) \neq 0$ ，若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 于 $x \rightarrow x_0$ 时渐近相等，記作

$$f(x) \simeq g(x) \text{ as } x \rightarrow x_0$$

PROPOSITION 1 於某處渐近相等是等價關係。因為

- (1) 對稱性 $f(x) \simeq g(x) \Rightarrow g(x) \simeq f(x)$
- (2) 反身性 $f(x) \simeq f(x)$
- (3) 傳遞性 $f(x) \simeq g(x) \wedge g(x) \simeq h(x) \Rightarrow f(x) \simeq h(x)$

DEFINITION 2 · Landau 記號

設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 為某區間 (a, b) 上的函數, 且 $g(x) \neq 0$. 若 $f(x)/g(x)$ 有界. 即有 $M > 0$ 和 $\delta > 0$ 而使某領域 $0 < |x - x_0| < \delta$ 所有之 x , $|f(x)/g(x)| \leq M$. 則稱 $g(x)$ 為 $f(x)$ 於 $x \rightarrow x_0$ 的漸近上界, 記作

$$f(x) \in O(g(x)) \text{ as } x \rightarrow x_0$$

若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

則稱 $f(x)$ 於 $x \rightarrow x_0$ 時為 $g(x)$ 漸近可略, 或稱高階無窮小, 記作

$$f(x) \in o(g(x)) \text{ as } x \rightarrow x_0$$

亦可記以

$$f(x) \ll g(x) \text{ as } x \rightarrow x_0$$

“ 以上定義旨在比較兩個函數在某點附近的變化率. 對於漸近相等的定義來說, 我們可以做一個簡單的變形

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = 0$$

也就是說, $f(x)$ 與 $g(x)$ 漸近相等, 表示了其差是 f 或 g 的高階無窮小. 也就是說其相對誤差在無限接近時為 0.

EXAMPLE 2

當 $x \rightarrow 0$ 時, $\sin x \in O(x)$, $x^2 \in o(x)$

DEFINITION 3 · 漸進序列

設 $\{\varphi_i(x)\}$ 為一族定義在某個區間 (a, b) 上的函數, 且 $\varphi_i(x) \neq 0$, 則稱 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ 為漸進序列, 如果

$$\varphi_1(x) \gg \cdots \gg \varphi_n(x) \text{ as } x \rightarrow x_0$$

EXAMPLE 3

當 $x \rightarrow 0$ 時, $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, $\{\cos x, \sin x, \sin^2 x\}$ 是漸進序列

設 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ 為漸進序列, 則 $\varphi_1(x) \gg \cdots \gg \varphi_n(x)$

$$f(x) \simeq a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) \Rightarrow f(x) \simeq a_1\varphi_1(x) \text{ as } x \rightarrow x_0$$

Proof.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} = a_1 + a_2 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} = a_1 \quad \blacksquare$$