



高斯积分

Uwni ✉ satanyalin@gmail.com

目录

1 高斯积分	1
1.1 Laplace 求法	1
1.2 Poisson 求法	2

1 高斯积分

高斯积分是形如

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

的积分，在统计学中有很大的用处。比如在正态分布概率函数中

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

我们不难发现，该函数实际上就是高斯积分被积函数的换元。然而 I 是无穷积分，不难发现

$$I = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-x^2} dx$$

而 $e^{-x^2} \leq 1$ ，被积函数有界，因此该积分是收敛的。我们的目的便是求出这个值。

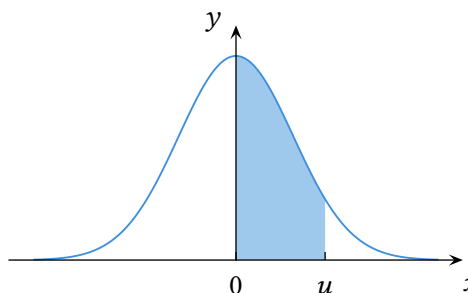


图 1 $y = e^{-x^2}$ 的图像，阴影部分的面积为 $\int_0^u e^{-x^2} dx$

1.1 LAPLACE 求法

下面给出 Laplace 的解法。由 Fubini 定理

$$I^2 = \left(2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx\right) \left(2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy\right) = 4 \iint_{[0,\infty)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (1)$$

我们换元以 $y = tx$

$$\begin{aligned} I^2 &= 4 \iint_{[0,\infty)^2} e^{-(1+t^2)x^2} x dx dt \\ &= 4 \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2} x dx \\ &= 4 \int_0^\infty dt \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-(1+t^2)x^2} dx^2 \\ &= 4 \int_0^\infty dt \left[-\frac{1}{2} (1+t^2)^{-1} e^{-(1+t^2)x^2} \right]_0^{x^2=\infty} \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 2 [\arctan t]_0^\infty \\ &= \pi \end{aligned}$$

因此，可得 $I = \sqrt{\pi}$

1.2 POISSON 求法

而此后，Poisson 给出了更优美的解决方案。相比于 Laplace 的 $y = tx$ ，Poisson 使用了不同的方法，他使用 $(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ ，因此對於式 1 而言。

$$\begin{aligned} I^2 &= 4 \iint_{[0,\infty)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= 4 \iint_{[0,\infty) \times [0, \frac{\pi}{2}]} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty \rho e^{-\rho^2} d\rho \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\rho^2} d\rho^2 \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{\rho^2=\infty} \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\varphi \\ &= \pi \end{aligned}$$

正如任何学习过微积分的人都会的那样。观察到被积函数在积分区域上的旋转对称性，通过将积分区域变为极坐标，巧妙的解决了。