



幅角定理

✉ Uwni 鶯鴒 ✉ uwni@example.com

1 ABSTRACT

Argument Principle 案例來說應該譯作「幅角原理」、但是鶯鴒認為「原理」一詞

Given polynomial $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$. It is obvious that $P(z)$ has 3 simple zeros at a, b and c . Let contour L enclose a and b but not c .

2 POLYNOMIAL

Given polynomial $P(z) = (z-a)^2(z-b)(z-c)$. There exists a zero of order 2 at a , and simple zeros at b and c . It is obvious, but we want to have a definition of zero for all holomorphic functions.

3 零點

當 $f(z_0) = 0$ 時、稱 z_0 為全純函數 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ 的**零點**。特別的、如果存在全純函數 $g: U(z_0) \rightarrow \mathbf{C}$ 和正整數 n 從而 $g(z_0) \neq 0$ 且

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

則稱 z_0 是 f 的 n **重零點**。如果 $n = 1$ 、則稱 z_0 為**單零點**。 n 稱為零點 z_0 的**重數**。

命題 1 (零點的局部結構) 設 Ω 是连通開集。 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ 全純而不凡、 z_0 是 f 的零點。 則唯一存在正整數 n 、並存在 z_0 的鄰域 $U(z_0) \subset \Omega$ 和其上非平凡的全純函數 $g: U(z_0) \rightarrow \mathbf{C}$ 、使得對於所有 $z \in U(z_0)$ 、都有

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

證。 因為 f 在 Ω 上全純、故在 z_0 處可展開為泰勒級數：

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

因為 f 在 Ω 上不全為 0、故存在 n 為最小的正整數使得 $a_n \neq 0$ 者。 則有

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n (z - z_0)^n + a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \dots \\ &= (z - z_0)^n (a_n + a_{n+1} (z - z_0) + a_{n+2} (z - z_0)^2 + \dots) \\ &=: (z - z_0)^n g(z) \end{aligned}$$

其中 $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k$ 。顯然 g 與 f 的收斂半徑相同。 在 Ω 上全純。

- (1) 所以 g 在某鄰域 $U(z_0)$ 中處處非零者. $a_n \neq 0$, 故 $g(z_0) = a_n \neq 0$. 由全純函數連續、存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $z \in U(z_0, \delta)$ 、有 $|g(z) - g(z_0)| < |g(z_0)|$. 由是 $|g(z)| > 0$ 、而 $g(z) \neq 0$.
- (2) n 所以唯一者. 設 $m \in \mathbf{N}^*$ 亦使得 $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$ 、其中 $h(z_0) \neq 0$. 不妨設 $m > n$. 則

$$g(z) = (z - z_0)^{m-n} h(z)$$

$z \rightarrow z_0$ 時、得知 $g(z_0) = 0$ 、謬也. 若 $n > m$ 、亦同理可證 $h(z_0) = 0$ 、亦謬. 於是 $n = m$. ■

根據上述命題我們獲知

- (1) 全純函數的零點的重數是存在且唯一的.
- (2) 非平凡全純函數零點是孤立的. 也就是說、零點的某鄰域內無其他零點.

命題 2 f 是 Ω 上的全純函數、則 f 有 m 重零點 $z_0 \in \Omega$ 若且唯若

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

證. (充分條件) 因為 z_0 是全純函數 f 的 m 重零點、所以有 $a_m \neq 0$ 而

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots$$

較然

$$f^{(n)}(z_0) = n!a_n = \begin{cases} 0 & n < m \\ m!a_m & n = m \end{cases}$$

(必要條件) 設全純函數 $f(z)$ 滿足 $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0$, $f^{(m)}(a) \neq 0$. $f(z)$ 在 a 處的泰勒級數為:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k \\ &= (z - a)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(m+k)}(a)}{(m+k)!} (z - a)^k \end{aligned}$$

可定義

$$g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(m+k)}(a)}{(m+k)!} (z - a)^k$$

於是 $f(z) = (z - a)^m g(z)$ 而 $g(a) = f^{(m)}(a)/m! \neq 0$. 且 $g(z)$ 和 $f(z)$ 有相同的收斂半徑. ■

4 極點