抽象代數

Uwni 覺鴉 *uwni@example.com*

1 二元運算

A, B, C 是集合．稱映射 $\cdot : A \times B \to C$ 爲定義在 A, B 上的**二元映射**，一般使用中綴表示法 $a \cdot b$ 來表示 $\cdot (a, b)$．特殊地，$A = B = C$ 時，稱爲 A 上的**二元算子**．對於二元算子 $\cdot$ 和 $\star$，$\forall a, b, c \in A$ 如果滿足

- $a \cdot b = b \cdot a$，則稱 $\cdot$ **可易**．
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$，則稱 $\cdot$ **結合**．
- $a \star (b \cdot c) = (a \star b) \cdot (a \star c)$，則稱 $\star$ 對 $\cdot$ **分配**．

2 幺元

對於 A 和其上的二元算子 $\cdot$，若 $\exists e_r \in A, \forall a \in A$，$a \cdot e_r = a$ 則稱 e_r 爲 $\cdot$ 的**右幺元**．同理，$\exists e_l \in A, \forall a \in A, e_l \cdot a = a$，則稱 e_l 爲 $\cdot$ 的**左幺元**．注意：幺元是針對與運算的，因此一個運算一個幺元

命題 1 若左幺元和右幺元同時存在，則必然相等

證明． 由右幺元的定義: $e_l e_r = e_l$ 由左幺元的定義: $e_l e_r = e_r$ 因此 $e_l = e_r$ ■

因此，若左幺元和右幺元皆存在，則可稱之爲**幺元**，記爲 e．

> M: 好像左極限右極限，左導數右導數的那種感覺，同時存在且相等才有．

命題 2 (存在唯一性定理) 若幺元存在，則唯一

證明． 假設存在符合定義的幺元 e_1 和 e_2 因爲幺元必然是右幺元，$e_1 e_2 = e_1$ 因爲幺元必然是左幺元，$e_1 e_2 = e_2$ 因此 $e_1 = e_2$ ■

> M: 好像極限的存在唯一性，微分方程 Pic̆hard 存在唯一性，泊松方程的存在唯一性．而且證明思路類似，用反證法

3 逆元

A 是集合，若運算 $\cdot$ 存在幺元 e．對於 $a \in A$，若 $\exists t_l \in A$ 使得 $t_l a = e$ 則稱 t_l 爲 a 的**左逆元**．且可類似地定義**右逆元**． > 注意：逆元是針對與元素的，在存在逆元的條件下，一個元素對應一個逆元

命題 3 若運算可結合，且 $a \in A$ 的左逆和右逆皆存在，則左逆等於右逆

證明． $t_r = e t_r = (t_l a) t_r = t_l (a t_r) = t_l e = t_l$ ■

若左逆等於右逆，則稱其爲 a 的**逆元**.

命题 4 若可結合運算存在 a 的逆元，則逆唯一

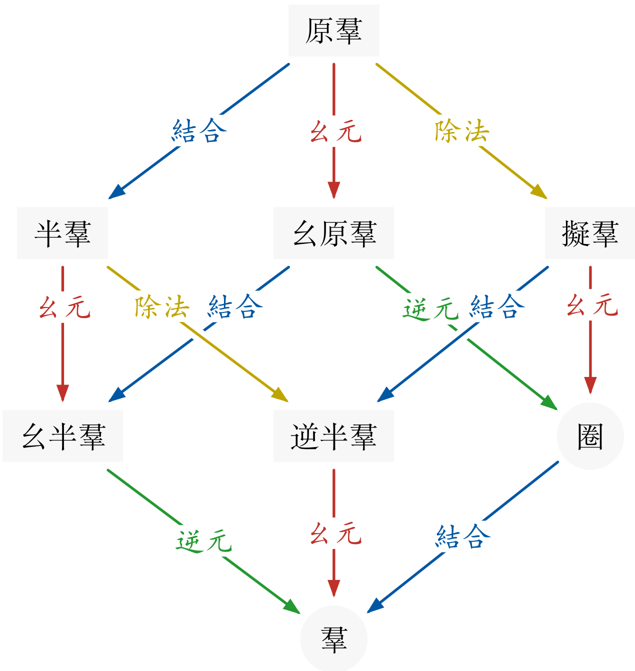
证明． 設 t_1 t_2 都是 a 的逆元

$$t_1 = t_1(at_2) = (t_1a)t_2 = t_2$$

■

若對於所有 $a \in A$ 都存在逆元，則稱運算 $\cdot$ 在 A 上**可逆**.

4 羣



設集合 G 非空，且在 G 上定義二元算子 $\cdot$. 則稱 $(G,\cdot)$ 爲**原羣**. $\cdot$ 謂之**運算**. 如果原羣 $(G,\cdot)$ 上

- 存在 $e \in G$ 爲 $\cdot$ 的幺元：$\forall a \in G(a \cdot e = e \cdot a = a)$，則稱 $(G,\cdot,e)$ 爲**幺元羣**；
- 運算 $\cdot$ 結合：$\forall a,b,c \in G((a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c))$，則稱 $(G,\cdot)$ 爲**半羣**；
  - 存在幺元 $e \in G$，且運算 $\cdot$ 結合，則稱 $(G,\cdot,e)$ 爲**幺半羣**；
  - 若（幺）半羣上運算交易：$\forall a,b \in G(a\cdot b = b\cdot a)$，則謂之**交易（幺）半羣**.

進一步，若在幺半羣 $(G,\cdot,e)$ 上 $\cdot$ 可逆，即如果 $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G(a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = e)$，則稱 $(G,\cdot,e)$ 爲**羣**. 並且定義映射

$$G \ni a \mapsto a^{-1} \in G$$

爲 $\cdot$ **逆映射**，如果羣 $(G,+,e)$ 是加法羣，則記 $+$ 逆映射爲

$$G \ni a \mapsto -a \in G$$

由命題 4 可知，羣中每個元素都存在唯一的逆.

如果羣上的運算交易，則稱之爲**交易羣**.

例 1 (映射幺半羣)
$(X^X, \circ, \mathrm{id}_X)$

例 2 (二元乘法羣)
設 $G = \{1, -1\}$ 是爲有兩個不同元素的集合. 用乘法表定義其上的二元運算

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

表 1

可以看出, $(G, \cdot, 1)$ 是一個交易羣. 其幺元爲 1, 且每個元素都是其自身的逆元. 從對稱性可以看出, 乘法是可易的.

5 置換

設集合 X 非空, 令

$$S_X = \{f \in X^X \mid f \text{ 雙映也}\},$$

稱 S_X 中的元素爲 X 上的**置換**.

命題 5 X 設爲非空集合, $(S_X, \circ, \mathrm{id}_X)$ 是非羣. 其中 $\circ$ 是映射的複合, id_X 是 X 上的恒等映射.

证明 .

- 任何双射的复合仍然是双射, 因此 S_X 在 $\circ$ 下封闭. ■

6 同構與同態

設 $(G, \circ)$ 和 $(H, \bullet)$ 是兩個原羣. 映射 $f \in H^G$, 如果對於所有 $a, b \in G$ 有

$$f(a \circ b) = f(a) \bullet f(b)$$

稱 f 爲從 $(G, \circ)$ 到 $(H, \bullet)$ 的**同態映射**. 簡稱**同態**. 如果同態 f 是雙射, 則稱 f 爲**同構映射**, 簡曰**同構**. 若存在同構 f, 則稱兩個原羣**同構**.