



集合

✉ Uwni 鶯鴒 ✉ uwni@example.com

集合論.

Uwni 鶯鴒 纂於 2026/01/13 12:17:12 時. 本文 ↗ 網菜.

1 論集合【稿】

閱讀本文需備初等數學基礎。

1.1 ZFC 公理

若夫集合者、聚同屬之物也。

命題 1 (內涵公理) 設 φ 爲一元謂辭

$$\exists A \forall x (x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$$

然則、適 φ 者皆見於 A 、 A 之所有悉適 φ 也。記

$$A = \{x \mid \varphi(x)\}$$

查察下例

例 1 (Russell 悖論)

設

$$X = \{\text{集合未嘗言及於本文者}\}$$

則 $X \notin X$ 、無己之集也。依內涵公理可聚此屬以爲一集

$$A = \{x \mid x \notin x\}$$

則此集有己乎？ $A \in A \leftrightarrow A \notin A$ 、謬。故知

$$\nexists A \forall x (x \in A \leftrightarrow x \notin x).$$

乖乎內涵公理也。

是以內涵公理宜畧爲限。

命題 2 (分離公理模式) 設 φ 爲一元謂辭

$$\forall A \exists B \forall u (u \in B \leftrightarrow u \in A \wedge \varphi(u))$$

內涵公理許擬集以任意謂詞、致生悖論。而依分離公理則止得分自既有之母集 B 也。設 $\varphi(u) := u \notin u$ 如前、凡集合 A 、子集 $R_A = \{x \in A \mid x \notin x\}$ 集也。以排中律或 $R_A \in R_A$ 或 $R_A \notin R_A$ 。代入分離公理得： $R_A \in R_A \leftrightarrow (R_A \in A \wedge R_A \notin R_A)$ 、 $R_A \in R_A$ 則 $R_A \notin R_A$ 、此似舛而非； $R_A \notin A$ 故也。如是、凡集合常有子集之外乎己者、所以莫有万全之集合也。(Zermelo 1908)

命題 3 (外延公理)

$$\forall A \forall B (A = B \leftrightarrow (\forall x, x \in A \leftrightarrow x \in B))$$

外延公理謂集之相等以其元之相等為準。

1.1.1 集合代數

設 A, B 皆集也。納 A 及 B 之所有爲一集、曰 A 與 B 之**并集**、記 $A \cup B$ 。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

擇 A 及 B 之共有爲一集、曰 A 與 B 之**交集**、記 $A \cap B$ 。

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

A 之所有之不見於 B 者、曰 A 與 B 之**差集**、記 $A \setminus B$ 。

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

1.1.2 子集與空集

設 A 集也。若分 A 爲一新集 B 、曰 A 之**子集**、記 $B \subseteq A$ 。然則凡 $b \in B$ 者悉見於 A 。

$$B \subseteq A := (\forall b \in B) b \in A$$

若 $B \subseteq A$ 且 $B = A$ 、則曰 B 爲 A 之**真子集**、記 $B \subset A$ 。

集合無所有者曰**空集**、簡曰**空**、記 $\emptyset$ 、又 $\{\}$ 。凡集、 $\emptyset$ 皆其子集也。

證。使 A 爲集。欲證 $\emptyset \subseteq A$ 、證 $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$ 而已。蓋 $\emptyset$ 無元、故前項爲假而命題空真矣。 ■

1.1.3 集族

集合之集曰**集族**。凡集合 S 之子悉聚以爲族、謂之**冪集**、記 $\mathcal{P}(S) := \{x \mid x \subseteq S\}$ 。譬若 $\mathcal{P}\{1, 2\} = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ 。 S 子集之族名曰**子集族**。 $\mathcal{P}(S)$ 之子集也。

$\mathcal{F}$ 集族也。

$$\bigcup \mathcal{F} := \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F := \{x \mid (\exists F \in \mathcal{F}) x \in F\}$$

名曰 $\mathcal{F}$ 之**泛並**。 $\mathcal{F}$ 非空¹⁾則謂

$$\bigcap \mathcal{F} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F := \{x \mid (\forall F \in \mathcal{F}) x \in F\}$$

曰 $\mathcal{F}$ 之**泛交**。且較然易見

$$\bigcup \{A, B\} = A \cup B$$

$$\bigcap \{A, B\} = A \cap B$$

若 $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \neq B \rightarrow A \cap B = \emptyset$ 則記 $\bigcup \mathcal{F}$ 爲 $\bigsqcup \mathcal{F}$ 。曰**不交並**。

1) 莫有万全之集合故也

設 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 、 $\emptyset \notin \mathcal{F}$ 、 X 之非空子集族也。

$$\bigsqcup \mathcal{F} = X$$

則曰 $\mathcal{F}$ 為 X 之劃分。

1.1.4 元組與直積

夫有序對者、又名二元組、記 (a, b) 。所謂 (Kuratowski 1921) 如下

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

遂

- $(b, a) = \{\{b\}, \{b, a\}\} \neq (a, b)$
- $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\} \neq \{a\} = (a)$

$\pi_1(a, b) := a$ 謂之第一影映、 $\pi_2(a, b) := b$ 謂之第二影映。

命題 4 $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

證。

- $(\leftarrow)$ 較然可見。
- $(\rightarrow)$ $a_1 = b_1$ 則

$$\{\{a_2\}, \{a_2, b_2\}\} = (a_2, b_2) = (a_1, b_1) = \{\{a_1\}\}$$

遂可見 $\{a_2\} = \{a_2, b_2\} = \{a_1\} \rightarrow a_2 = b_2 = a_1 = b_1$ 。

不然、 $a_1 \neq b_1$ 則

$$\{\{a_2\}, \{a_2, b_2\}\} = (a_2, b_2) = (a_1, b_1) = \{\{a_1\}, \{a_1, b_1\}\}$$

等式右側集合有二元、左側亦宜然。遂 $a_2 \neq b_2$ 。而 $\{a_2\} = \{a_1\}$ 、 $\{a_2, b_2\} = \{a_1, b_1\}$ 可知矣。於是 $a_2 = a_1$ 且 $b_2 = b_1$ 。■

若夫 a 所有于 A 、 b 所有于 B 者、遍聚二元組之集合謂之 A 與 B 之直積、記 $A \times B$ 。所謂如下

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

例 2 (六十甲子)

記稱大桡作甲子、隸首作數。二者既立、以比日表、以管万事。天地二甲子、十干十二支。數從甲子始、子母相求。十日十二辰、周六十日。設

$$\text{干} = \{\text{甲, 乙, 丙, 丁, 戊, 己, 庚, 辛, 壬, 癸}\}$$

$$\text{支} = \{\text{子, 丑, 寅, 卯, 辰, 巳, 午, 未, 申, 酉, 戌, 亥}\}$$

請問 $\text{干} \times \text{支}$ 者六十甲子乎? 非也。如「甲丑」弗在其中。干支相繼而得六十甲子故也。

$A \times A$ 得記為 A^2 . 至於三元組、可謂之以 $(a_1, a_2, a_3) := ((a_1, a_2), a_3)$ 、四元組 $(a_1, a_2, a_3, a_4) := ((a_1, a_2, a_3), a_4)$ 謂之如前、准此及 n 元組、得遞歸謂之

$$(a_1, \dots, a_n) := ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

而有 n 維直積謂之如下

$$A_1 \times \dots \times A_n := \left\{ (a_1, \dots, a_n) \mid \bigwedge_{1 \leq i \leq n} a_i \in A_i \right\}$$

$$A^n := A^{n-1} \times A$$

1.2 關係

集合 $R \subseteq A \times B$ 者、謂之 A 與 B 上之二元關係、畧以關係. 若 $A = B$ 即 $R \subseteq A^2$ 則曰 A 上之關係. $(a, b) \in R$ 則曰 (a, b) 適 R . 以中綴表達式記曰 aRb 、亦可記以前綴式並輔以括弧讀號、曰 $R(a, b)$.

- 謂 R 之定義域者

$$\text{dom } R := \{a \mid \exists b R(a, b)\}$$

- 謂 R 之像域者

$$\text{i}R := \{b \mid \exists a R(a, b)\}$$

- 謂 R 之逆關係者

$$R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

則可得而見 $\text{dom } R^{-1} = \text{i}R$ 及 $\text{i}R^{-1} = \text{dom } R$.

- 謂二元關係 S 與 R 之複合者

$$S \circ R := \{(a, c) \mid \exists b \in B, (a, b) \in S \wedge (b, c) \in R\}$$

例 3

大學校內、設 A 為生集、 B 為課程、 C 為師集. 則 $S \subseteq A \times B$ 為學生受業關係、 $R \subseteq B \times C$ 為教師受業關係. 然則 $S \circ R$ 為師生關係也. 某生與某師有師生關係、則有某課師授而生受也.

命題 5 (複合關係之結合律) 使 $R \subseteq A \times B$ 、 $S \subseteq B \times C$ 、 $T \subseteq C \times D$. 則

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

證. 以示 $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$ 、凡 $(a, d) \in T \circ (S \circ R)$ 者、 $\exists c \in C$

$$(a, c) \in S \circ R \wedge (c, d) \in T$$

$(a, c) \in S \circ R$ 是以 $\exists b \in B$

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in S$$

以 $(b, c) \in S \wedge (c, d) \in T$ 、知 $(b, d) \in T \circ S$ 。又以 $(a, b) \in R$ 知 $(a, d) \in (T \circ S) \circ R$ 。

反則可證 $T \circ (S \circ R) \supseteq (T \circ S) \circ R$ 。 ■

1.2.1 相若關係

設 $\sim$ 為集 S 上之二元關係。適三性如下列者謂 S 上之相若關係：

- 自反性： $(\forall s \in S) s \sim s$
- 對稱性： $(\forall s, t \in S) s \sim t \rightarrow t \sim s$
- 傳遞性： $(\forall s, t, u \in S) s \sim t \wedge t \sim u \rightarrow s \sim u$

設 $\sim$ 為 S 上之相若關係、凡 $s \in S$ 、集合 $[s]_{\sim} := \{t \in S \mid s \sim t\}$ 名曰 s 之相若類。 S 之相若類族曰商集、記 $S/\sim := \{[s]_{\sim} \mid s \in S\}$ 。

命題 6 $\sim$ 為相若關係之於 S 。則商集 $S/\sim$ 為 S 之劃分。

證。 設 $\mathcal{S} := S/\sim$ 。將欲證 $\mathcal{S}$ 為 S 之劃分、證以

- (1) 曰 $\forall X \in \mathcal{S}, X \neq \emptyset$ ：設 $X \in \mathcal{S}$ 、則有 $s \in S$ 使 $X = [s]_{\sim}$ 。以 $s \sim s$ 、知 $s \in [s]_{\sim}$ 、故 $X \neq \emptyset$ 。
- (2) 曰 $\bigcup \mathcal{S} = S$ ：設 $s \in S$ 。以 $s \sim s$ 、知 $s \in [s]_{\sim}$ 。以 $[s]_{\sim} \in \mathcal{S}$ 、知 $s \in \bigcup \mathcal{S}$ 。反之、設 $s \in \bigcup \mathcal{S}$ 、則有 $X \in \mathcal{S}$ 使 $s \in X$ 。以 X 為某相若類。故 $s \in S$ 。
- (3) 曰 $\forall X, Y \in \mathcal{S}, X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$ ：證其逆否。假令 $X \cap Y \neq \emptyset$ 、則有 $u \in S$ 使 $u \in X$ 且 $u \in Y$ 。且 $\forall x \in X \forall y \in Y, x \sim u \sim y$ 、故而 $x \in Y$ 且 $y \in X$ 。是以 $X = Y$ 。 ■

命題 7 設 $\mathcal{S}$ 為 S 之劃分。有二元關係

$$\sim_{\mathcal{S}} = \{(x, y) \in S^2 \mid \exists A \in \mathcal{S}, x \in A \wedge y \in A\}$$

則

- (1) $\sim_{\mathcal{S}}$ 為相若關係。且 $S/\sim_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$
- (2) 若 $\sim$ 為相若關係且 $S/\sim = \mathcal{S}$ 、則 $\sim = \sim_{\mathcal{S}}$ 。

證。 ■

是以二元關係與劃分一一對應也

1.2.2 恆等關係

記 S 上之恆等關係曰 id_S

$$\text{id}_S := \{(s, s) \mid s \in S\}$$

若 $S = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit\}$ 、 $\text{id}_S = \{(\clubsuit, \clubsuit), (\diamond, \diamond), (\heartsuit, \heartsuit)\}$

恆等關係者、相若關係之最小者也。

命題 8 使 $R \subseteq A \times B$ 為二元關係。則 $R \circ R^{-1} = \text{id}_B$

證。

■

1.2.3 序關係

$(S, \preceq)$ 設以爲結構之並以關係者、並有

- 自反性: $(\forall s \in S) s \preceq s$
- 反對稱性: $(\forall s, t \in S) s \preceq t \wedge t \preceq s \rightarrow s = t$
- 傳遞性: $(\forall s, t, u \in S) s \preceq t \wedge t \preceq u \rightarrow s \preceq u$

則 $\preceq$ 名曰**偏序關係**。偏序關係之最小者、唯恆等關係也。不難證明之。

- (1) id 適自反性、反對稱性、傳遞性、故爲偏序關係也。
- (2) 凡 $(\forall s \in S) \text{id} \setminus \{(s, s)\}$ 之關係皆以違自反性而非偏序關係也。故最小也
- (3) 凡偏序關係必含 id 也。可以歸謬法示其唯一也。

若夫偏序之匪等者、謂之**固偏序**。記 $\prec$ 。 $a \prec b := a \preceq b \wedge a \neq b$ 。

若改偏序 $\preceq$ 之自反性爲完全性 $(\forall s, t \in S) s \preceq t \vee t \preceq s$ 、則謂曰**全序關係**、又**鎖**。凡全序之關係、恆偏序也。請備述之。全序關係適反對稱性與傳遞性、並以完全性蘊含自反性即知其亦偏序也。

$(T, \preceq)$ 偏序之構也。 $s \in T$ 、若夫

- $\forall t \in T, s \not\prec t$ 、莫大於 s 。 s 謂之**極大**。
- $\forall t \in T, t \not\prec s$ 、莫小於 s 。 s 謂之**極小**。
- $\forall t \in T, t \preceq s$ 、皆小於 s 。 s 謂之**最大**、記 $\max T = s$ 。
- $\forall t \in T, s \preceq t$ 、皆大於 s 。 s 謂之**最小**、記 $\min T = s$ 。

最大(小)者極大(小)也。

偏序集之非空有窮者。

- 極大(小)元常有。
- 最大(小)元不常有。若 $T = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit\}$ 、偏序關係 $\preceq = \text{id}$ 。 $\clubsuit$ 孰與 $\diamond$? 所以無最大(小)元者、不可比而已。

全序集之非空有窮者、常有最大(小)元。請擬以歸納示之

證。(非空有窮全序集 S 有最大元)

- (1) $|S| = 1$ 、 S 之元唯一、即最大最小元也。
- (2) $|S| = 2$ 、設 $S = \{t_1, t_2\}$ 、其最元得計算如下

$$\max S = \begin{cases} t_1 & \text{if } t_2 \preceq t_1 \\ t_2 & \text{if } t_1 \preceq t_2 \end{cases}$$

- (3) 設 $|S| = N$ 、 S 有最大元。察 $|S| = N + 1$ 、令 $S' = S \setminus \{s\}$ 。由前款知 S' 有最大元 M' 。然則 $\max S = \max\{M', s\}$ 、 S 之最大元也。 ■

集之界、不逾之境也。凡集 $S \subseteq T$ 之元 s 、其或 $s \leq M$ 者、則謂 M 爲 S 一**上界**。反之、若 $M \leq s$ 則曰**下界**。上下界並存、則謂之**有界**。界不必含於集也。上界之最小者、曰**上確界**、或曰最小上界、記 $\sup S$ 。下界之最大者、曰**下確界**、或曰最大下界、記 $\inf S$ 。

$$\sup S = \min\{t \in T \mid s \in S, s \leq t\}$$

$$\inf S = \max\{t \in T \mid s \in S, t \leq s\}$$

若夫上界與上確界、察其性質、凡有二項、一曰 $\sup S$ 為 S 之上界、二曰凡其上界莫小於 $\sup S$ 、最小之上界也。請問偏序集恆有上界乎？1. 較然可見有窮集恆有界、且 $\sup S = \max S$ 而 $\inf S = \min S$ 也。依序遍歷 S 之元。

命題 9 設 $(X, \preceq)$ 為全序集。下列三命題相若也。

- (1) 凡 X 之非空子集有上界者有上確界
- (2) 凡 X 之非空子集有下界者有下確界
- (3) A, B 皆 X 之非空子集也。凡 A 中之 a 與 B 中之 b 使 $a \preceq b$ 者。 X 中必有一元 c 間於 a, b 、即 $\exists c \in X, a \preceq c \preceq b$

證。 將以 $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ 次第證之。

$(1 \Rightarrow 2)$: 使 A 為 X 之非空子集、有下界。集 A 之下界以為 $B := \{b \in X \mid b \preceq a, \forall a \in A\}$ 以 A 有下界知 B 之不空也。凡 $a \in A$ 皆為 B 上界也。故 B 有上確界也。假 $m := \sup B$ 、而 $m \preceq a$ 也（以上確界為最小上界故耳）。故知、 $m \in B$ 而 $m = \max B$ 。 A 下界之最大者也。 $m = \inf A$ 。

$(2 \Rightarrow 3)$: 設 A, B 皆 X 之非空子集也。 $\forall a \in A, \forall b \in B, a \preceq b$ 也。故知 A 之元俱為 B 之下界也。由 (2) 知 B 有下確界、設以為 $c := \inf B$ 、則 $a \preceq c \preceq b$ 、即所求也。

$(3 \Rightarrow 1)$: ■

1.3 映

X, Y 皆設以為集也。夫偏映者、 $X \times Y$ 上之二元關係 f 之

$$(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \rightarrow y = y'$$

者也。若夫定義域及像域之所謂、悉承自二元關係也。若復 $\text{dom } f = X^{(2)}$ 、則曰全映、簡稱映。記 $f: X \rightarrow Y$ 、 Y 曰終域。若 $(x, y) \in f$ 、記曰 $f(x) = y$ 或 $f: x \mapsto y$ 。若 Y 為一數集、則 f 謂之函數。

例 4 (映射例)

- $\{(x, y) \in \mathbf{R}_{\geq 0}^2 \mid y^2 = x\}$ 。 $y = \sqrt{x}$ 之上半支也。
- X 上之恆等關係 id_X 、由其所謂、 $\text{id}_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ 、於是 $(x, y) \in \text{id}_X \rightarrow x = y$ 且 $(x, y') \in \text{id}_X \rightarrow x = y'$ 而 $y = x = y'$ 矣。乃知其偏映。又 $\text{dom } \text{id}_X = X$ 、故知 id_X 為映。遂稱 $\text{id}_X: X \ni x \mapsto x \in X$ 恆等映射。

悉集 X 到 Y 之函數于 $Y^X := \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$ 。

2) 即 $X \subseteq \text{dom } f$

1.3.1 限制

$f: X \rightarrow Y$ 為映也、 $S \subseteq X$ 、集合

$$f[S] := \{f(s) \mid s \in S\}$$

名曰 f 於 S 之像集。

命題 10 $f[S] \subseteq f[X] = \text{if}$

證。一者較然可見。二者欲所證、 $f[X] \subseteq \text{if}$ 及 $f[X] \supseteq \text{if}$ 而已。其 $\text{if} = \{y \in Y \mid (\exists x \in X)f(x) = y\}$ 承義自二元關係。

($\subseteq$) $\forall y \in f[X] = \{f(x) \mid x \in X\}$ 有 $x \in X$ 遂使 $y = f(x) \in Y$ 。故 $y \in \text{if}$ 。

($\supseteq$) $\forall y \in \text{if}$ 有 $x \in X$ 遂使 $y = f(x)$ 。是以 $y \in f[X]$ 。 ■

定義函數 f 於 S 之限制 $f|_S: S \rightarrow Y$ 、 $f|_S(s) := f(s)$ 。於是 $\text{if}|_S = f[S]$ 。

1.3.2 單滿性

$f: X \rightarrow Y$ 映也。夫單映者、

$$f(x) = f(x') \rightarrow x = x'.$$

蓋 f 之元不同而像相違也。記 $f: X \rightarrowtail Y$ 。

夫滿映者、

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$$

蓋 Y 之元悉 f 之像也。記 $f: X \twoheadrightarrow Y$ 。

夫對映者、單映且滿映。記 $f: X \rightarrowtail Y$ 。

命題 11 $(f: X \twoheadrightarrow Y) \leftrightarrow (\text{if} = Y)$

證。(→) 使 f 滿映。欲證明 $\text{if} = Y$ 、則以 $\text{if} \subseteq Y \wedge Y \subseteq \text{if}$ 其證也。前者較然。及後者、以 f 滿映、 $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ 。是以 $y \in \text{if} = \{f(x) \mid x \in X\}$ 。

(←) 使 $\text{if} = Y$ 、欲證 f 滿映、則須證 $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ 而已。蓋 $\text{if} = Y$ 、則 $\forall y \in Y, y \in \text{if}$ 。是以 $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ 。 ■

是故、函數之單映否、滿映否、對映否、須復論及定義域與終域。如函數 $f: x \mapsto x^2$ 之於下列各集合中單映滿映固不同也。

$x \mapsto x^2$	單	滿
$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$		
$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$		○
$\mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$	○	○

例 5 (單映與滿映)

恆等函數 id_X 對映也。

以 $\forall x, x' \in X, x = \text{id}_X(x) = \text{id}_X(x') = x'$ 且 $\text{id}_X = X$ 故也。

1.3.3 複合與逆

映射者素二元關係也。映射之複合不亦映射乎？

命題 12 (複合映射) $f \in Y^X, g \in Z^Y$ 則其複合關係 $g \circ f \in Z^X$ 。

證。使 $(x, z) \in g \circ f$ 、由複合關係之所謂、知 $\exists y \in Y$ 使 $(x, y) \in f \wedge (y, z) \in g$ 。復使 $(x, z') \in g \circ f$ 、知 $\exists y' \in Y$ 使 $(x, y') \in f \wedge (y', z') \in g$ 。以 f 映射而知 $y = y'$ 。以 g 映射而知 $z = z'$ 。

$$(x, z) \in g \circ f \wedge (x, z') \in g \circ f \rightarrow z = z'$$

乃知 $g \circ f$ 偏映。然後證及 $\text{dom}(g \circ f) = X$ 。

$f \in Y^X$ 故 $\text{dom } f = X$ 。 $\forall x \in X, \exists y \in Y, (x, y) \in f$ 。又以 $g \in Z^Y$ 故 $\text{dom } g = Y$ 。
 $\exists z \in Z, (y, z) \in g$ 。於是 $(x, z) \in g \circ f$ 。

$$\forall x \in X, \exists z \in Z, (x, z) \in g \circ f$$

乃知 $\text{dom}(g \circ f) = X$ 。 ■

蓋此其映射之複合關係所以映射矣。可以複合關係之結合律知複合映射之結合。

命題 13 單 (滿) 映之複合亦單 (滿) 映也。

證。設 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ 。

- 單映：設 $x, x' \in X$ 、若 $g(f(x)) = g(f(x'))$ 、則以 g 單映知 $f(x) = f(x')$ 。以 f 單映知 $x = x'$ 。
- 滿映：設 $z \in Z$ 。以 g 滿映知 $\exists y \in Y, g(y) = z$ 。以 f 滿映知 $\exists x \in X, f(x) = y$ 。是以 $g(f(x)) = z$ 。 ■

復知對映之複合亦對映也。

映射之複合映射也。至於映射之逆關係則不然。若映射 $f: X \rightarrow Y$ 其逆關係 f^{-1} 成映則曰 f 可逆。然則 f^{-1} 其名曰 f 之逆映。

命題 14 $f^{-1} \circ f^{-1} = f$

命題 15 映 $f: X \rightarrow Y$ 可逆 $\leftrightarrow f$ 為對映。

證。(←) 使 f 單映、即 $y = f(x) = f(x')$ 則 $x = x'$ 。思惟其逆關係 $f^{-1} \subseteq Y \times X$ 、則

$$(y, x) \in f^{-1} \wedge (y, x') \in f^{-1} \rightarrow x = x'$$

乃知 f^{-1} 偏映. 使 f 滿映則由命題 11 知 $Y = \text{if} = \text{dom } f^{-1}$. f 對映則 f^{-1} 映也.

($\rightarrow$) 使 f 可逆. 然則 f^{-1} 成映、 $\forall x, x' \in X, \forall y \in Y, (y, x) \in f^{-1} \wedge (y, x') \in f^{-1} \rightarrow x = x'$ 以逆關係之所謂、

$$f(x) = y = f(x') \rightarrow x = x'$$

乃知 f 單映也. $Y = \text{dom } f^{-1} = \text{if}$. 故知 f 滿映. ■

命題 16 映 $g: Y \rightarrow X$ 使 $g \circ f = \text{id}_X$ 者、謂之 f 之左逆映. 使 $f \circ g = \text{id}_Y$ 者、謂之 f 之右逆映. 然則 f 可逆 $\leftrightarrow f^{-1}$ 左逆且右逆.

證. 設 $y = f(x)$ 即 $(x, y) \in f$ 、有 $(y, x) \in f^{-1}$ 、即 $x = f^{-1}(y)$.

- 先證 f^{-1} 左逆. 即 $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$.
- 次證 f^{-1} 右逆. 即 $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$ ■

命題 17 f 有左逆映則 f 單映也.

證. 設 $g: Y \rightarrow X$ 為 f 之左逆映也. 欲證 f 單映、證以 $f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$. $f(x) = f(x')$ 然則 $g(f(x)) = g(f(x'))$. 以 g 為 f 之左逆映知 $x = x'$. ■

1.4 指標與泛直積

設 $\mathcal{A}$ 為非空集族. $f: I \rightarrow \mathcal{A}$ 滿映也. 然則謂 f 為 $\mathcal{A}$ 之指標映而 I 為指標集. $(\mathcal{A}, f)$ 謂之指標族. 蓋以指標集之元標記集族之元素. 凡指標 $i \in I$, 記其所指 $f(i) \in \mathcal{A}$ 為 A_i . 則以 f 滿映、 $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$. 並可記 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$. 指標類上之泛並與泛交謂之以

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

又若 $I = \{1, \dots, n\}$ 則可記泛並為 $\bigcup_{i=1}^n$ 、或 $\bigcap_{1 \leq i \leq n}$. 泛交亦相類也.

命題 18

$$(1) \quad \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \mathcal{A}$$

$$(2) \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap \mathcal{A}$$

證.

(1) $\forall x \in \bigcup \mathcal{A}, \exists A \in \mathcal{A}$ 遂使 $x \in A$. 以 f 滿映、 $\exists i \in I, A = f(i) = A_i$ 、使 $x \in A_i$ 、遂 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. 反之、 $\forall x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ 、則 $\exists i \in I, x \in A_i \in \mathcal{A}$. 於是 $x \in \bigcup \mathcal{A}$.

(2) 盖相似. ■

X 集合也、查映 $f: \mathbf{N}_{\leq m}^* \rightarrow A$. 例 $X = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$ 、 $m = 2$ 、則 $f(1) = \heartsuit, f(2) = \diamond$ 、 f 擇取 X 之二元也. 夫 f 自變量不必為自然數. 設指標類 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ 、於是所謂泛直積者

$$\prod_{i \in I} A_i := \{f \text{ 映也} \mid \forall i \in I, f(i) \in A_i\}$$

凡指標 $i \in I$ 者、 f 之函數 $\pi_i(f) := f(i)$ 、 $\pi_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i$ 謂之第 i 影映.

例 6

Date Picker 者、圖形控件所以擇年月日也. 設指標集 $I = \{\text{年, 月, 日}\}$ 、指標族 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ 、其中 $A_{\text{年}} = \{1970, \dots, 2026\}$ 、 $A_{\text{月}} = \{\text{一月, 二月, } \dots, \text{十二月}\}$ 、 $A_{\text{日}} = \{1, 2, \dots, 31\}$.

2025	十一月	30
2026	十二月	31
▶ 1970	一月	01 ◀
1971	二月	02
1972	三月	03

圖表 1 日期擇者

是以泛直積 $\prod_{i \in I} A_i$ 之元 f 即為所擇日期. $\pi_{\text{年}}(f)$ 所擇之年、 $\pi_{\text{月}}(f)$ 所擇之月、 $\pi_{\text{日}}(f)$ 所擇之日也.

注意 $\prod_{i=1}^n A_i$ 相違於 $A_1 \times \dots \times A_n$. 前者指標集上映之集合、後者 n 元組之集合也. 若比 $n = 2$ 、則泛直積 $\prod_{i=1}^2 A_i$ 之元素 $f = \{(1, a_1), (2, a_2)\}$ 相違於 $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$. 然其對偶而構同、相若關係不易故也. 由是元組可示以離散映射. 若夫元組之元皆數者、謂之數組.

1.5 勢

孟子曰「權、然後知輕重；度、然後知長短. 物皆然.」計集 S 其元众寡曰勢、記以 $|S|$. S, T 集合也、欲比其勢、以映量之. 有 $S \rightarrow T$ 之單映、則 S 寡於 T . 曰 S 勢弱於 T 、或曰 T 勢強於 S 、記 $|S| \leq |T|$. 若有對映 $S \rightarrow T$ 、則曰二集等勢、記曰 $|S| = |T|$. 蓋以 S 度 T 而無盈虛、則勢相若. $|S| \leq |T| \wedge |S| \neq |T|$ 、則記曰 $|S| < |T|$.

多使自然數為籌、比之多少、 $\exists n \in \mathbf{N}$ 可使 S 對映于 $\mathbf{N}_{< n} := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 、然則謂 S 有窮、勢 n 、記 $|S| = n$. 若有集 $S = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$ 、計以一、二、三、四乃知其勢 4. 有對映

$$f: S \rightarrow \mathbf{N}_{< 4}$$

$$\clubsuit \mapsto 0, \diamond \mapsto 1, \heartsuit \mapsto 2, \spadesuit \mapsto 3$$

故也. 是以有窮集者、必得以自然數指標其元.

若夫莫能以自然數數者、謂之**無窮集**。如分數集、實數集等。 $|\mathbf{N}|$ 定為 $\aleph_0$ 。集合與自然數集勢等者、謂曰**可數**、否則曰**叵數**。如分數集為可數集、實數集為叵數集。有窮集之勢自然數、且 $|\emptyset| = 0$ 。無窮集者、雖不可勝數、猶可較也。集可使其元對映於自然數者、若盡數自然數之勢然。

例 7 (自然數之等勢)

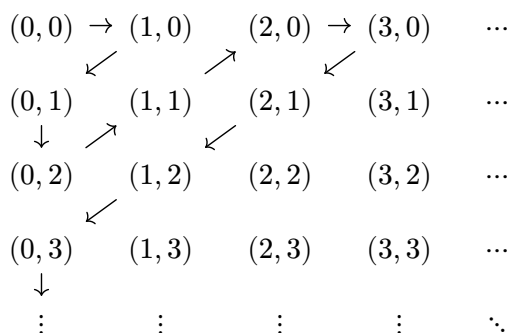
以下集合可數無窮：

- **$[\mathbf{N}^*]$ —— 正自然數**

易可驗證 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}^*, n \mapsto n+1$ 對映、故 $|\mathbf{N}^*| = \aleph_0$ 。

- **$[\mathbf{N}^n]$ —— 自然數組**

Cantor 折線法。列 $\mathbf{N}^2$ 所有為無窮矩陣、後沿折線以自然數編號、得對映 $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}^2$ 也。



于是凡自然數 n 、 $\mathbf{N}^n$ 皆可數也。若 $(a, b, c) \in \mathbf{N}^3$ 、對應 $(a, (b, c)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^2$ 也。以此類推。

- **$[2\mathbf{N}]$ —— 偶數**

$f(n) = 2n$ 者 $\mathbf{N} \rightarrow 2\mathbf{N}$ 之對映也。奇數亦然。進一步 $\mathbf{N}/n\mathbf{N}^{3)}$ 之任意非空子集可數無窮也。

- **$[\mathbf{Z}]$ —— 整數**

整數集也。設 $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$

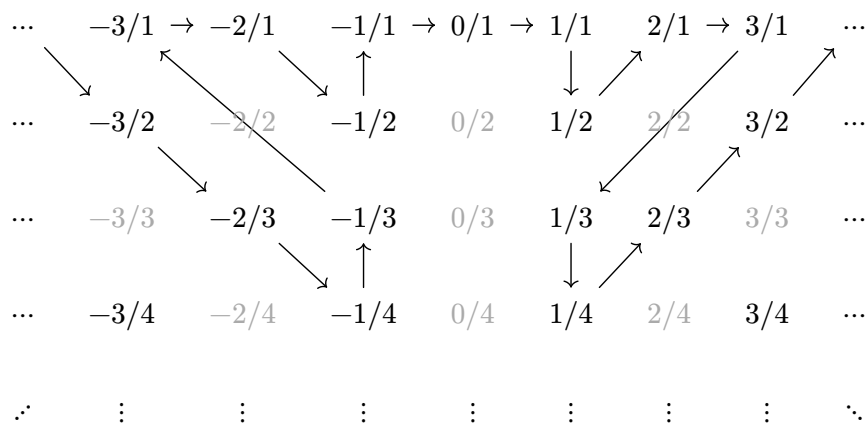
$$f(n) = \begin{cases} -2n-1 & \text{若 } n < 0 \\ 2n & \text{若 } n \geq 0 \end{cases}$$

是映正數悉於偶數而負數悉映於奇數也。

- **$[\mathbf{Q}]$ —— 分數**

分數集也。依其所謂、 $\mathbf{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$ 。故而可列下表。

3) 此商群也



由徑、凡真分數悉見舉也。

命題 19

- (1) $\aleph_0^n = \aleph_0$
- (2) $\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$
- (3) $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

命題 20 (Schröder-Bernstein 定理) S 、 T 集也。

$$|S| \leq |T| \wedge |T| \leq |S| \rightarrow |S| = |T|$$

證．設 $f: S \rightarrow T$ 與 $g: T \rightarrow S$ 皆單映也．欲證 $|S| = |T|$ 、以對映 $h: S \rightarrow T$ 之有、此則其證也．設

$$S_n := \begin{cases} S \setminus g[T] & \text{若 } n = 0 \\ g \circ f[S_{n-1}] & \text{若 } n > 0 \end{cases}$$

S_0 之元莫有 g 之像也．而 $S_1, S_2, \dots$ 之屬、俱可緣溯至 S_0 ．故集 S 之元之源自 S 者設以爲 $\mathcal{S}_S := \bigcup_{n \in \mathbf{N}} S_n$ ．設 $\mathcal{T}_S := f[\mathcal{S}_S]$ 、 T 之元之源自 S 者也． $\mathcal{S}_S, \mathcal{S}_T$ 不相交．蓋 $s \in \mathcal{S}_S$ 源自 S 而非 T 故也．

設

$$h: S \rightarrow T = \begin{cases} f & \text{若 } s \in \mathcal{S}_S \\ g^{-1} & \text{若 } s \in S \setminus \mathcal{S}_S \end{cases}$$

則 h 對映也．何故？

- f 單映而 $f|_{\mathcal{S}_S}$ 自然．反之、 $f|_{\mathcal{S}_S}: \mathcal{S}_S \rightarrow \mathcal{T}_S$ 滿映也．以 $\mathcal{T}_S = f[\mathcal{S}_S] = \text{if}|_{\mathcal{S}_S}$ 較然可知．於是 $f|_{\mathcal{S}_S}$ 對映也．
- 同理以知 $g|_{T \setminus \mathcal{T}_T}$ 單映．而

$$g[T \setminus \mathcal{T}_S] = S \setminus \mathcal{S}_S$$

然則可以命題 11 知 $g|_{T \setminus \mathcal{T}_T} : T \setminus \mathcal{T}_T \rightarrow S \setminus \mathcal{S}_S$ 滿映也。所以然者、蓋

- ▶ 凡 $s \in S \setminus \mathcal{S}_S$ 者、 $s \notin \mathcal{S}_0$ 。是以 $s \in g[T] \rightarrow (\exists t \in T)g(t) = s$ 。須證 $t \notin \mathcal{T}_S$ 而已。若 $t \in \mathcal{T}_S$ 、則 $(\exists s' \in \mathcal{S}_S)f(s') = t$ 。則 $s = g(t) = g(f(s'))$ 即 $(\exists n \in \mathbf{N}_+)s \in S_n \subseteq \mathcal{S}_S$ 。謬也。故 $t \notin \mathcal{T}_S \rightarrow t \in T \setminus \mathcal{T}_S \rightarrow s = g(t) \in g[T \setminus \mathcal{T}_S]$ 。
- ▶ 反之、凡 $s \in g[T \setminus \mathcal{T}_S]$ 者、 $\exists t \in T \setminus \mathcal{T}_S, g(t) = s$ 。須證 $s \notin \mathcal{S}_S$ 而已。若 $s \in \mathcal{S}_S$ 、則 $(\exists n \in \mathbf{N}_+)s \in S_n$ 。繼而 $(\exists s' \in \mathcal{S}_S)g(f(s')) = s$ 、因 g 單映、 $t = f(s') \in \mathcal{T}_S$ 。謬也。故 $s \in S \setminus \mathcal{S}_S$ 。

是以 h 對映也。 ■

命題 21 (鴿籠原理) 設 S 、 T 集也。 $|S| > |T|$ 、則無單映 $S \rightarrow T$ 。

證。歸謬法。使 $S \rightarrow T$ 。則 $|S| \leq |T|$ 。謬也。 ■

命題 22 (Cantor' s 定理) S 集也。

$$|S| < |\mathcal{P}(S)|$$

證。 $S \ni x \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(S)$ 單射。故知 $|S| \leq |\mathcal{P}(S)|$ 。 $|S| \neq |\mathcal{P}(S)|$ 然則證遂。否則 $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ 或滿也。

$$T := \{s \in S \mid s \notin f(s)\} \in \mathcal{P}(S)$$

欲證 T 不在 f 之中、而 f 非對映也。不然、使 $\exists t \in S, f(t) = T$ 。則

- (1) $t \in T$ 、則 $t \notin f(t) = T$ 。謬也。
- (2) $t \notin T$ 、則 $t \in f(t) = T$ 。謬也。 ■

可數集 S 之冪集 $\mathcal{P}(S)$ 尤勢 $2^{|S|}$ 也、請以歸納法示之: $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1$ 。使 $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$ 。若添新元 x 於 S 以爲 $S' = S \cup \{x\}$ 。其冪集 $\mathcal{P}(S')$ 猶守 $\mathcal{P}(S)$ 之固有。 $\mathcal{P}(S')$ 之新增者 $\{x\}$ 併於 $\mathcal{P}(S)$ 之固有也。

$$\mathcal{P}(S \cup \{x\}) = \mathcal{P}(S) \sqcup \{Y \cup \{x\} \mid Y \in \mathcal{P}(S)\}.$$

是以

$$\begin{aligned} 2^{|S \cup \{x\}|} &= |\mathcal{P}(S \cup \{x\})| \\ &= |\mathcal{P}(S)| + |\{Y \cup \{x\} : Y \in \mathcal{P}(S)\}| \\ &= 2^{|S|} + 2^{|S|} = 2^{|S|+1}. \end{aligned}$$

是其證也。

引據

KURATOWSKI, Casimir, 1921. Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles. *Fundamenta mathematicae*. Online. 1921. Vol. 2, no. 1, p. 161 ~ 171. DOI ↗10.4064/fm-2-1-161-171.

ZERMELO, E., 1908. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. *Mathematische Annalen*. Online. 1 六月 1908. Vol. 65, no. 2, p. 261 ~ 281. DOI ↗10.1007/BF01449999.

2 論數集

本章議數集之建構及諸性質。數集者、蓋數之集合也。數集之有、始於自然數。自然數之有、始於人數物之需。人數物以計其數、故有自然數也。自然數者、其性自然。人之所創者、記號而已矣。今之數學需以形式論理之、故欲明自然數之義、必議以公理。

數學之發展、非獨賴自然數也。蓋自然數之有、猶樹之有根本也。樹之有枝葉、賴根本而生也。數學之有他數集、賴自然數而立也。故分析學之始、必自自然數論也。

2.1 論自然數

公理 1 (Peano 算數公理系統) 算數語言 $\mathcal{L}_{AR} = \{0, S, =\}$, 0 常符也、曰「零」。S 一元函數符也、曰後繼。= 等價關係也、曰「相等」。x, y, ... 變元也。並以公理

- (PA1) $\forall x, S(x) \neq 0$; 0 非後繼也
- (PA2) $\forall x, \forall y, (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$; 後繼相等則原數相等
- (PA3) $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x))) \rightarrow \forall x\varphi(x)$ 一階歸納法模式
 - (PA3*) $\forall \varphi[\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x))) \rightarrow \forall x\varphi(x)]$ 二階歸納法原理

(PA1) ~ (PA3) 曰一階 Peano 公理。將 (PA3) 換為 (PA3*) 則曰二階 Peano 公理。後文所述皆用二階。至此、算數之構造初成矣。然加法、乘之義猶未立也。 $\mathcal{L}_{AR}$ 外、加號 +, 乘號 $\times$, 小於號 $\leq$ 之義也、以中綴記遞歸立之如下：

定義 1 (加法)

- (1) $x + 0 := x$; 加零得其數也
- (2) $x + S(y) := S(x + y)$; 加後繼得和之後繼也

註：為了體現還原論的精神、我們這裡採用了 5 公理版本的基本 PA 公理系統、+ , $\times$ 不在 $\mathcal{L}_{AR}$ 中。因此不能固然保證對於任何 $x + y$ 皆「有定義」、即表示 $\mathcal{L}_{AR}$ 中一項 (term)。此實良義也。蓋凡 x 、可證加法於 y 皆有定義。設 $P(y) := x + y$ 有定義、若 $y = 0$ 、則依 (1) 知有定義也。若 $x + y$ 有定義、則以 (2) 而 $x + S(y)$ 亦有定義。由 PA3 知全有定義也。

有關乘法之公理：

- (PA8) $\forall x(x \times 0 = 0)$; 乘零得零也
- (PA9) $\forall x, \forall y(x \times S(y) = (x \times y) + x)$; 乘後繼得

$\mathcal{L}_{AR}$ -結構之適二階 PA 公理系統者 $\mathfrak{N} \models PA_2$ 、標準模型也。其論域曰「自然數集」。但注意滿足一階 PA 的結構不全是標準模型、比如下例

例 8 (非標準模型)

...

然則確有合 $\mathfrak{N}$ 結構之造耶？一例「歸納集」也。對任意集合 x ，稱集合 $x \cup \{x\}$ 為 x 的後繼、記為 $S(x)$ 。

命題 23 (無窮公理) 存在集合 X 、 $\emptyset \in X$ 、並且 X 中任意元素之後繼亦在其中。即

$$\exists X(\emptyset \in X \wedge \forall x \in X, S(x) \in X)$$

$$0 := \emptyset$$

$$1 := S(0) = \{0\} = \{\emptyset\}$$

$$2 := S(1) = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 := S(2) = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$\vdots$

定義如果一個集合 X 滿足

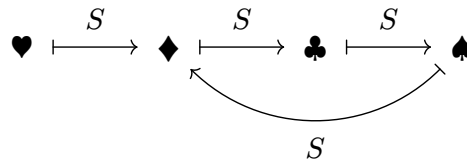
$$\emptyset \in X \wedge \forall x \in X, S(x) \in X$$

則曰 X 為**歸納集**。則無窮公理可謂：存在歸納集也。可見 $0 = \emptyset$ 存在於任何歸納集中

而 Dedekind (1888) 证明了所有二階 Peano 算數的模型都同構的。即同构意义上只有一种自然数集。

察時針之刻、 $N' := \{\square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square\}$, $0' := \square$. S 進一時刻也。然則 $\square = S\square$ 、是以不適 N_0 而不適 PA 也。

又察下例、 $N' := \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$, $0' := \heartsuit$. 設 S 其義如下。 $\diamondsuit = S\heartsuit = S\spadesuit$ 違於 N_1 而不適 PA 也。



ν 滿射也。即 $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists m \in \mathbf{N}, Sm = n$

證。設 $M := \text{Im } \nu \cup \{0\} = \{n \in \mathbf{N}^* \mid \exists n' \in \mathbf{N}, Sn' = n\} \cup \{0\}$ 。若 $m \in M \subseteq \mathbf{N}$, $Sm \in \text{Im } \nu \subseteq M$ 。由 N_1 知 $M = \mathbf{N} = \mathbf{N}^* \cup \{0\}$ 。以 $0 \notin \text{Im } \nu$, $\text{Im } \nu = \mathbf{N}^*$ 故 ν 滿射也。 ■

2.1.1 序

加法既立、則可定義自然數之序。

定義 2 (序關係) 凡自然數 n, m 、若有 $k \in \mathbf{N}$ 使 $n = m + k$ 、則曰 m 小於等於 n 、記 $m \leq n$ 。若 $k \neq 0$ 、則曰 m 小於 n 、記 $m < n$ 。

此序關係全序也、凡自然數皆可相較也。

證。此序關係為全序、須證四性：

自反性 ($n \leq n$):

由加法定義、 $n = n + 0$. 以 $0 \in \mathbf{N}$ 、故 $n \leq n$ 恆真.

反對稱性 ($m \leq n$ 且 $n \leq m \Rightarrow m = n$):

若 $m \leq n$ 、則有 $k_1 \in \mathbf{N}$ 使 $n = m + k_1$.

若 $n \leq m$ 、則有 $k_2 \in \mathbf{N}$ 使 $m = n + k_2$.

代入得 $m = (m + k_1) + k_2 = m + (k_1 + k_2)$. 此式意味 $k_1 + k_2 = 0$. 二自然數之和為零、必二者皆零也、故 $k_1 = 0$. 是以 $n = m + 0 = m$.

傳遞性 ($l \leq m$ 且 $m \leq n \Rightarrow l \leq n$):

若 $l \leq m$ 、則有 k_1 使 $m = l + k_1$.

若 $m \leq n$ 、則有 k_2 使 $n = m + k_2$.

代入得 $n = (l + k_1) + k_2 = l + (k_1 + k_2)$. 令 $k_3 = k_1 + k_2$ 、則 $k_3 \in \mathbf{N}$ 、故 $l \leq n$.

完全性 ($m \leq n$ 或 $n \leq m$):

此可用歸納法證之. 固定 $m \in \mathbf{N}$ 、歸納于 n . 令命題 $P(n) := m \leq n \vee n \leq m$.

• **基始**: $n = 0$.

由加法定義、 $m = 0 + m$. 故 $0 \leq m$ 恆為真. 是以 $P(0)$ 成立.

• **歸納**: 設 $P(n)$ 為真、即 $m \leq n$ 或 $n \leq m$. 察 $P(S(n))$.

• 若 $m \leq n$ 、則有 k 使 $n = m + k$. 故 $S(n) = S(m + k) = m + S(k)$. 是以 $m \leq S(n)$. 此時 $P(S(n))$

• 若 $n \leq m$ 、則有 k 使 $m = n + k$.

– 若 $k = 0$ 、則 $m = n$. 故 $S n = S m = m + S 0$ 、則 $m \leq S(n)$. 此時 $P(S n)$.

– 若 $k \neq 0$ 、則有 k' 使 $k = S(k')$. $m = n + S(k') = S(n) + k'$. 是以 $S(n) \leq m$. 此時 $P(S(n))$.

綜上、凡 $\vdash P(n) \rightarrow P(S(n))$. 由是、據歸納公理、完全性得證. ■

2.1.2 記數法

然加法既成、尚需記數之法以表之. 吾人所習用者、十進位制也. 蓋以十為基、逢十進一. 所用數碼、印度-阿拉伯數字也、凡十、曰 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

定義 3 (十進位表示法) 凡自然數 $n \in \mathbf{N}$ 、其十進位表示乃一字符串 $s_k s_{k-1} \dots s_1 s_0$ 、其中 s_i 皆為數碼. 此串之值、定義如下:

$$n = \sum_{i=0}^k s_i \times 10^i$$

其中 10 為 $\nu(9)$. 此式建立自然數與數碼串之對應.

此映射如何構造? 可以遞歸為之. 凡 $n \in \mathbf{N}$ 、其記數 $f(n)$ 定義為:

- 若 $n < 10$ 、則 $f(n)$ 為對應之數碼. 如 $f(\nu(0))$ 為 “1”.
- 若 $n \geq 10$ 、則以帶餘除法可得 $n = q \times 10 + r$ 、其中 $0 \leq r < 10$. 則 $f(n)$ 為 $f(q)$ 與 $f(r)$ 之拼接.

若、欲求 123 之表示。

$$(1) 123 = 12 \times 10 + 3$$

$$(2) 12 = 1 \times 10 + 2$$

$$(3) 1 = 0 \times 10 + 1$$

由是、 $f(123)$ 為 $f(12)$ 拼接 $f(3)$ 、即 $f(1)$ 拼接 $f(2)$ 再拼接 $f(3)$ 、終得 “123”。

至此、抽象之自然數集方有吾人熟識之形態。

2.2 論整數

相等關係

$$a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c$$

凡自然數 n 、察對射於 $\mathbf{N} \rightarrow \{n - 0 \mid n \in \mathbf{N}\}$ 上者 $n \mapsto n - 0$ 。知整數之形如 $n - 0$ 者同構於 $\mathbf{N}$ 也。故可以整數 n 記自然數 $n - 0$ 而無虞也。逆元

$$-a := 0 - a$$

2.3 分數論

相等關係

$$a//b = c//d \Leftrightarrow ad = bc$$

必有

$$(\exists x//y \in [a//b]) \gcd(x, y) = 1$$

約式、或曰最簡分式、分式之子母互素者也。例如 $1/1$ 、 $2/3$ 、 $5/8$ 。以其子母皆最小、立為 $\mathbf{Q}/=$ 之代表元也。稠性: a

2.4 實數論

請問、正方形之對角線長 l 幾何? 以勾股定理知 $l^2 = 2$ 、擬其長以一分數之約式 $l = p/q$

$$l^2 = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2 \mid p^2 \Leftrightarrow 2 \mid p$$

$$\Leftrightarrow \exists p'(p = 2p') \Leftrightarrow 2p'^2 = q^2 \Leftrightarrow 2 \mid q^2 \Leftrightarrow 2 \mid q$$

p 與 q 皆偶數、而 p/q 非約式也。故知 l 非分數之屬也。以 $\Upsilon\pi\pi\alpha\sigma\sigma\varsigma$ 之初覺為嚆矢、分數之遺缺始昭於天下矣。此所以分數不可以度量也。

另察一例、有集分數其平方皆小於 2 者

$$\mathbf{Q}_{<\sqrt{2}} := \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2\}$$

即知有上界也。而無上確界。擬以歸謬法證之：設其上確界為 $\bar{x}$ 、則 $\forall x \in \mathbf{Q}_{<\sqrt{2}}, \bar{x} \geq x$ 、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in \mathbf{Q}_{<\sqrt{2}}, \bar{x} - \varepsilon < y$$

由全序關係之三歧性知

(1) 若 $\bar{x}^2 = 2$: 證偽

(2) 若 $\bar{x}^2 > 2$ 、需證明 $\exists y \in \mathbf{Q}_{<\sqrt{2}}, y < \bar{x}$ 、設 $y = \bar{x} - \varepsilon$ 、並使 $y^2 > 2$ 。即 y 為上界而甚小耳。

$$(\bar{x} - \varepsilon)^2 \geq 2 \Leftrightarrow \bar{x}^2 - 2\bar{x}\varepsilon + \varepsilon^2 > 2 \Leftarrow \bar{x}^2 - 2\bar{x}\varepsilon \geq 2 \Leftrightarrow \varepsilon \leq \frac{\bar{x}^2 - 2}{2\bar{x}}$$

不妨取 $\varepsilon = (\bar{x}^2 - 2)/(2\bar{x})$ 、即為證

(3) 若 $\bar{x}^2 < 2$ 、需證明 $\exists y \in \mathbf{Q}_{<\sqrt{2}}, y > \bar{x}$ 、設 $y = \bar{x} + \varepsilon$ 。即 $\bar{x}$ 乃非上界耳。

$$y^2 = (\bar{x} + \varepsilon)^2 \leq 2 \Leftrightarrow \bar{x}^2 + 2\bar{x}\varepsilon + \varepsilon^2 < 2 \Leftarrow \bar{x}^2 + 2\bar{x}\varepsilon \leq 2 \Leftrightarrow \varepsilon \leq \frac{2 - \bar{x}^2}{2\bar{x}}$$

不妨取 $\varepsilon = (2 - \bar{x}^2)/(2\bar{x})$ 、即為證

故知 $\mathbf{Q}_{<\sqrt{2}}$ 上確界之不存也。

二例。

$$\mathbf{Q}_{<2} := \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 4\}$$

可知 $x \geq 2$ 皆上界也、而 $\sup \mathbf{Q}_{<2} = 2$ 也

凡 Q 為 $\mathbf{Q}$ 上非空有上界子集、則定義為實數。全序集 $(X, \preceq)$ 。若其非空子集之有上界者有上確界。曰**序完備**