

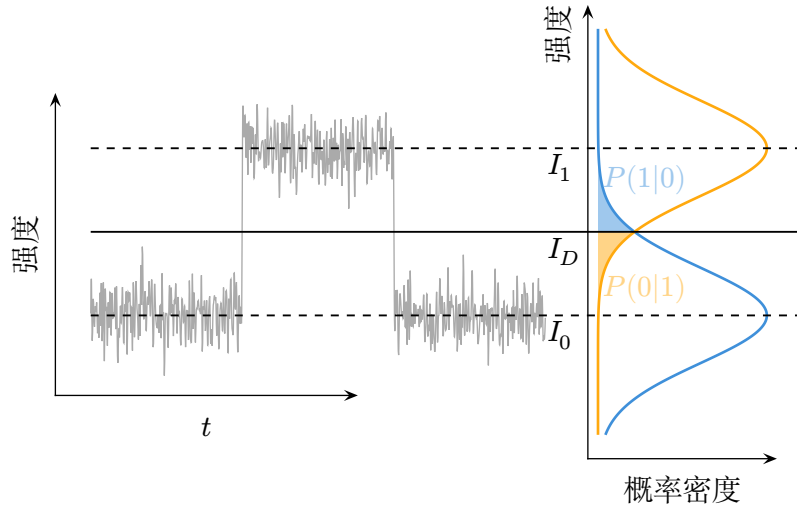


信号判决

✉ Uwni 鶯鴒 ✉ uwni@example.com

1 二值判决

在通信系统中，在接受端对模拟信号进行判决以恢复出数字信号是一个重要环节。最简单的信号判决方式是基于接收信号的强度进行判决。假设发送端发送两种强度的信号，space 表示二进制 0，mark 表示二进制 1，接收端根据接收到的信号强度与预设的判决阈值进行比较，从而决定接收到的是 0 还是 1。实际上，收到信道噪声的影响，接收信号的强度会围绕发送的强度值波动，因此有错判之虞。



假设 mark 信号的概率为 $p(1)$ ，space 信号的概率为 $p(0)$ 。假设信号 mark 被错判为 space 的概率为 $P(0|1)$ ，信号 space 被错判为 mark 的概率为 $P(1|0)$ 。则总误码率 (Bit Error Rate) 为：

$$\text{BER} = p(1)P(0|1) + p(0)P(1|0)$$

$$P(0|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{-\infty}^{I_D} \exp\left(-\frac{(I - I_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) dI = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{I_1 - I_D}{\sqrt{2}\sigma_1}\right)$$

$$P(1|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{I_D}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(I - I_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) dI = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{I_D - I_0}{\sqrt{2}\sigma_0}\right)$$

其中 erfc 是互补误差函数 (complementary error function)：

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-t^2) dt$$

$$\text{BER} = \frac{1}{2} \left(p(1) \text{erfc}\left(\frac{I_1 - I_D}{\sqrt{2}\sigma_1}\right) + p(0) \text{erfc}\left(\frac{I_D - I_0}{\sqrt{2}\sigma_0}\right) \right)$$

我们发现，当信源均匀分布，即 $p(0) = p(1) = 1/2$ 时，

$$\begin{aligned}\text{BER} &= \frac{1}{2}(P(0|1) + P(1|0)) \\ &= \frac{1}{4} \left(\text{erfc} \left(\frac{I_1 - I_D}{\sqrt{2}\sigma_1} \right) + \text{erfc} \left(\frac{I_D - I_0}{\sqrt{2}\sigma_0} \right) \right) \\ \partial_{I_D} \text{BER} &= 0\end{aligned}$$

解得

$$I_D^* = \frac{\sigma_1 I_0 + \sigma_0 I_1}{\sigma_0 + \sigma_1}$$

使用的一阶渐近展开近似

$$\text{erfc}(x) \simeq \frac{\exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}} \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

$$\text{BER}(Q) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{Q}{\sqrt{2}} \right) \approx \frac{\exp \left(-\frac{Q^2}{2} \right)}{Q\sqrt{2\pi}}$$

